TEOREMI E COSTRUZIONI DI GEOMETRIA PROIETTIVA

PEL DOTTOR

GIUSEPPE VERONESE

Io ero ancora studente a Zurigo quando mi occupai di questi semplicissimi teoremi di geometria proiettiva; ora che mi paiono nuovi, li presento ai giovani studenti e cultori delle matematiche, perchè si esercitino nelle dimostrazioni di geometria pura.

1°

Teoremi su due quadrangoli, inscritti in una conica, aventi un punto diagonale comune.

Teorema I. *Una coppia qualunque di lati opposti di un quadrangolo inscritto in una conica incontra una coppia di lati opposti di un secondo quadrangolo, inscritto pure nella conica e avente col primo un punto diagonale comune* O, *in quattro punti situati due a due in linea retta col punto* O. *Sono escluse le coppie di lati opposti che s' incontrano in* O,

Da questo teorema si deduce il seguente teorema noto:

I vertici di due quadrangoli che hanno gli stessi punti diagonali o giacciono in una conica oppure in due rette.

Teorema II. *I lati di una coppia di lati opposti del* 1° *quadrangolo segano rispettivamente due coppie di lati non opposti del* 2° *quadrangolo, purchè i due vertici che esse determinano siano in linea retta con* O, *in quattro punti due a due situati in due rette, che s' incontrano nella polare del punto diagonale comune* O. *I lati del* 1° *e* 2° *quadrangolo, qui considerati, non devono passare per* O.

Teorema III. *Due coppie di lati non opposti del* 1° *quadrangolo, purchè i due vertici che esse determinano siano in linea retta con* O, *tagliano rispettivamente due* *coppie di lati non opposti del 2° quadrangolo, e che soddisfano alla stessa condizione di quelle del 1°, in quattro punti, che due a due sono situati in quattro rette passanti rispettivamente due a due per due punti* W_1 *e* W_2 *della polare* O *rispetto alla conica.*

In ciascuno di questi punti s' incontrano due rette che congiungono due vertici di un quadrangolo con due altri del secondo. I punti W *sono* 8*; per ciascuno di essi passano quattro rette, che congiungono due a due i* 16 *punti d' incontro dei lati del* 1° *quadrangolo con quelli del* 2°*, trascurando i lati dei quadrangoli che passano per* O.

Dai teoremi I e III si deduce il seguente e noto teorema, credo di Poncelet, cioè:

Gli otto lati di due quadrangoli inscritti in una conica k *e aventi un punto diagonale comune* O*, dei quali nessuno passa per* O*, toccano una conica* k_1.

I quattro lati d'infiniti quadrangoli inscritti in k*, e aventi un punto diagonale comune* O*, dei quali lati nessuno passa per* O*, toccano la* k_1.

2°

TEOREMA I. *Dato un triangolo qualunque* ABC *inscritto in una conica* k*, si determinino i punti* $A' B' C'$ *coniugati armonici dei punti d' incontro* $\alpha\beta\gamma$ *dei lati* BC, AC, AB *del triangolo* ABC *con la tangente in un punto* O *della conica rispetto ai vertici del medesimo. Si determinino i punti corrispondenti* $\alpha'\beta'\gamma'$ O' *di* $\alpha\beta\gamma$ O *in un'involuzione qualunque situata sopra la tangente in* O*, oppure in modo che* $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$, OO' *siano coppie di punti corrispondenti di due punteggiate proiettive, e si costruisca la polare* ω' *del punto* O' *rispetto alla conica* k. *I punti d' incontro* α'', β'', γ'' *dei lati* $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ *del triangolo* $A'B'C'$ *con la retta* ω' *uniti rispettivamente con* $\alpha'\beta'\gamma'$*, danno tre rette* $\alpha''\alpha', \beta''\beta', \gamma''\gamma'$ *che passano per uno stesso punto* X.

TEOREMA II. *Se la coppia dei punti doppi dell'involuzione sulla tangente in* O *si mantiene armonica colla coppia di punti* OO'*, il punto* X *descrive una retta passante per* O'.

TEOREMA III. *Se si considerano quattro punti di una conica e la tangente in* O *della medesima, sopra della quale sia segnata un'involuzione, oppure siano date due punteggiate proiettive qualunque, i quattro punti* X*, che corrispondono ai quattro triangoli del quadrangolo, sono situati in una retta.*

Per sei punti di una conica i 20 *punti* X*, che si ottengono dai* 20 *triangoli dell'esagono, sono situati quattro a quattro in* 15 *rette, le quali tre a tre passano per ciascuno di essi.*

Ed in generale:

Per n *punti di una conica si ottengono* $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}$ *punti* X *situati quattro a quattro in* $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}$ *rette, che passano* (n−3) *ad* (n−3) *per ciascuno di essi.*

Dal teorema I si ricavano i seguenti corollarii:

COROLLARIO I. *Se un triangolo è inscritto in una parabola, i lati del suo triangolo mediano* (*) *vengono tagliati da un diametro qualunque della parabola in tre punti, dai quali condotte tre rette che formano coi lati del triangolo mediano un angolo eguale a quello che il diametro fa colla direzione del suo polo e dello stesso senso, queste tre rette s'incontrano in un punto del cerchio circoscritto al triangolo mediano.*

COROLLARIO II. *Dato un triangolo qualunque inscritto in una parabola, i lati del suo triangolo mediano sono intersecati dall'asse della medesima in tre punti, dai quali innalzate le tre perpendicolari sui rispettivi lati del triangolo mediano su cui essi giacciono, queste s'incontrano in un punto del circolo circoscritto al triangolo mediano.*

COROLLARIO III. *Dato un triangolo ed una retta* g *tale che le perpendicolari innalzate sui lati nei punti d'incontro* $\alpha''\beta''\gamma''$ *con la medesima s'incontrano in un punto, se si congiunge un punto* O *del piano coi punti* $\alpha''\beta''\gamma''$ *e coi punti all'infinito dei lati del triangolo, si ottengono due fasci proiettivi, ove la retta parallela e la perpendicolare condotta da* O *alla retta* g *formano un'altra coppia di raggi corrispondenti.*

COROLLARIO IV. *Se un triangolo è inscritto in una parabola, e se dai punti d'incontro dei lati del suo triangolo mediano con un diametro qualunque della parabola si tirano tre rette, che formano rispettivamente con una delle bisettrici dell'angolo dato dal diametro e dalla direzione del suo polo angoli eguali e di senso contrario a quelli che i lati del triangolo mediano formano rispettivamente con la stessa bisettrice, queste tre rette s'incontrano in un punto.*

COROLLARIO V. *I lati di un triangolo mediano di un triangolo inscritto in una parabola incontrano un diametro qualunque di essa in tre punti, dai quali tirate tre rette che formano rispettivamente col diametro degli angoli eguali e di egual senso o di senso contrario a quelli che i lati formano colla direzione del polo del diametro, esse s'incontrano in un punto.*

(*) Per triangolo mediano di un triangolo dato intendo quello formato coi punti di mezzo dei lati del triangolo.

Dal secondo corollario si ottiene il teorema seguente:

Teorema IV. *Se quattro punti* ABCD *sono situati in un cerchio, i quattro cerchi di nove punti dei quattro triangoli mediani dei quattro triangoli del quadrangolo* ABCD *s'incontrano in un punto situato nella retta che congiunge il centro del cerchio dato col punto d'incontro dei circoli dei nove punti dei triangoli del quadrangolo, e nella metà del segmento di questi due ultimi punti.*

Da questo si ricava ancora:

Teorema V. *Le coppie di assi ortogonali delle parabole, che passano per tre punti fissi* ABC *e per un punto mobile* D *nel cerchio circoscritto ai tre primi, generano un ipocicloide tricuspide; il punto d'incontro* S *degli assi di una di queste coppie descrive il circolo* m *dei nove punti del triangolo mediano del triangolo fisso. Se il punto* D *si muove nel circolo fisso di un angolo* α, *il vertice* S *della coppia di assi ad esso corrispondente si muove pure di un angolo* α *nel circolo* m *dei nove punti del triangolo mediano. Il diametro del circolo* ABC *passante per* D *è parallelo al diametro del circolo* m *passante per* S. *L'ipocicloide tocca i lati del triangolo mediano.*

Quale curva viene inviluppata dalle coppie di assi ortogonali delle parabole passanti per il punto fisso D *e per i vertici del triangolo* ABC, *che si muove nel circolo* ABCD *mantenendosi sempre lo stesso, e quali curve se si danno ad* ABCD *delle velocità angolari differenti nel circolo* ABCD*?*

Più generalmente si può dire secondo il Corollario I *che tutti gli assi delle parabole passanti per tre punti fissi generano un'ipocicloide tricuspide.*

Questa curva viene generata anche nel modo seguente:

Teorema VI. *Date quattro tangenti di un'ipocicloide tricuspide delle quali tre passano per un punto* A, *si scelga uno dei triangoli da esse formato per esempio* ABC. *Per i punti* B *e* C *si tirino delle rette, che formano coi lati rispettivamente opposti del triangolo* ABC *degli angoli eguali e di egual senso a quello che la terza retta passante per* A *forma col lato* BC*; le rette così ottenute sono pure tangenti dell'ipocicloide. Con le nuove rette e con le quattro date si formino altri triangoli, purchè per uno dei vertici passi sempre un'altra tangente oltre i due lati del triangolo; ripetendo la costruzione precedente si ottengono altre tangenti, e così via.*

Questa stessa costruzione può adoperarsi quando anche siano date quattro tangenti di una tale ipocicloide; basta determinare un'altra tangente passante per uno dei punti d'incontro delle quattro tangenti date.

In altra nota parleremo di questa curva e della cardioide (la cui generazione è analoga a quella dell'ipocicloide tricuspide mediante cioè le rette *pedali* (*), ottenute da un punto fisso O in un cerchio e da un triangolo inscritto nel medesimo che si muove in esso mantenendosi sempre lo stesso) e di altre curve che si generano invece dando ai vertici del triangolo ed al punto O sul cerchio velocità angolari differenti.

3°

Teorema I. *Dati quattro punti* ABCD *di una conica, una trasversale qualunque passante per uno di essi p. e. per* D *incontra i lati del triangolo* ABC *in tre punti, che con l'altro punto d'incontro della trasversale con la conica formano un rapporto anarmonico costante, cioè eguale a quello dei quattro punti* ABCD *sulla conica.*

Corollario I. *Dati quattro punti di un'iperbole* ABCD *di cui due* A *e* B *sono all'infinito, una trasversale qualunque passante per* D *taglia le rette* CA , CB *e la conica in tre punti, due segmenti qualunque formati con questi sono in un rapporto costante. Dato un quinto punto* E *dell'iperbole, questo rapporto viene completamente determinato.*

Corollario II. *Dati i due asintoti e un punto* D *dell'iperbole, costruito l'estremo* D' *del diametro passante per* D *si tirino da questo due parallele agli asintoti; una trasversale qualunque passante per* D *taglia queste due rette in due punti, il cui segmento è diviso per metà dal 2° punto d'incontro della trasversale colla conica.*

Con questo teorema si può costruire una conica data mediante 5 punti; la costruzione si presta ancora meglio se il rapporto dei punti ABCD nella conica è armonico, oppure se si tratta dei casi dell'iperbole, indicata nei corollari. Così si può costruire la conica che deve passare per quattro punti dati sulla quale questi devono avere un rapporto anarmonico dato.

4°

Tutti i seguenti teoremi si ottengono considerando la conica, che si ottiene dai due fasci, i quali proiettano da due punti OO_1 di una conica k due punteggiate proiettive od in involuzione situate nella medesima.

Costruzione della conica mediante punti e tangenti. *In un quadrangolo* OO_1FF_1 *inscritto in una conica* k_1, *si congiungano* OO_1 *con un punto arbitrario* X *della*

(*) Per retta pedale s'intende la retta che congiunge i piedi delle perpendicolari condotte da O ai lati del triangolo.

conica, si ottengono sopra due lati tt_1 *del quadrangolo passanti rispettivamente per* O_1 *ed* O *coppie di punti corrispondenti di due punteggiate proiettive, il cui asse di omologia* u'' *è la retta* FF_1. *Se* AA' *sono i due punti ottenuti in* t *e* t_1 *mediante il punto* X, *la tangente in* X *è la retta che lo congiunge col punto d'incontro di* AA' *con* FF_1. *Le congiungenti i punti* $A'\,B'\,C'$... *coi punti d'incontro dei raggi* OA , OB , OC... *con la retta* FF_1 *e la tangente in* O *s'incontrano in un punto di* t.

Determinati i punti AA' si costruiscono semplicemente altre coppie di punti corrispondenti BB', CC' etc. delle due punteggiate u_1 di cui FF_1 è la retta u'' e con ciò altri punti e tangenti della conica.

TEOREMA I. *La conica inviluppata dalle rette congiungenti i punti corrispondenti* AA',BB',CC' *di due punteggiate proiettive situate in una conica* k, *e la conica* k_1 (*o* k_1') *che viene generata dai due fasci proiettivi, che proiettano quelle due punteggiate da due punti* OO_1 *della conica* k, *sono omologiche pel punto d'incontro delle due tangenti in* O *ed* O_1 *alla* k_1(*o* k_1') *come centro, e la retta, che unisce i due punti uniti delle due punteggiate proiettive, come asse di omologia.*

Quando le due punteggiate AA',BB',CC' sono in involuzione, le rette AA',BB',CC' passano per un punto P ; la conica k_1 generata dai fasci proiettivi, che proiettano da due punti OO_1 della eonica k, chiamiamola *conica polare* del punto P rispetto alla conica k. *Le tangenti nei punti* $(OA,O_1A')\equiv A_1$, $(OA',O_1A)\equiv A'_1$ *alla conica polare passano pel punto d'incontro della retta polare di* P *rispetto a* k *con la trasversale* AA'. *Le rette analoghe ad* $(OA\,,\,O_1A')\,(OA'\,,\,O_1A)$ *passano per un punto* P_1, *che gode della stessa proprietà rispetto alla conica polare* k_1 *di* P, *che questo gode rispetto a* k. *Il punto d'incontro delle rette* AA' , A_1A_1' *descrive una conica.*

Da qui si deduce facilmente :

TEOREMA II. *Due fasci proiettivi* OO_1 *generano un'iperbole equilatera* k_1, *quando descritto un cerchio* k *sul diametro* OO_1 *esso venga intersecato da due raggi corrispondenti in due punti* (*oltre di* OO_1) *in linea retta con un punto fisso* P, *che è il punto d'incontro delle tangenti in* O *ed* O_1 *all'iperbole* k_1.

Da qui :

TEOREMA III. *Due fasci proiettivi che generano un'iperbole equilatera sono sempre diretti in senso contrario o nello stesso senso, quando il punto* P *è esterno od interno al cerchio* k.

Dal teorema II si ricavano facilmente i seguenti teoremi:

Il punto d'incontro delle tre altezze di un triangolo inscritto in un'iperbole giace sulla curva.

E quando il punto P va all'infinito si ha:

Due fasci proiettivi eguali e di senso contrario generano un' iperbole equilatera che ha i loro centri per estremi di un diametro.

Si dimostra facilmente che muovendosi il punto P nella retta AA' il luogo dei centri delle iperboli equilatere, che si ottengono nel modo indicato nel teorema II, e che passano tutte per i quattro punti $OO_1 A_1 A_1'$, è il circolo dei nove punti *m* dei triangoli formati con questi quattro punti. La curva inviluppata dagli asintoti di tutte le iperboli equilatere di un fascio è un ipocicloide tricuspide, onde qui troviamo una semplice costruzione di questa curva, quando sono date due coppie di tangente ortogonali. Chiamisi μ il punto di mezzo di OO_1, che è il centro di *k*, volendo costruire la coppia di tangenti ortogonali, che ha il suo vertice S in un punto dato del circolo dei nove punti *m*, basta congiungere S con μ, i due punti d'incontro della retta $S\mu$ con *k* uniti con O oppure con O_1 danno la direzione delle due tangenti richieste. Viceversa data una direzione passante p. e. per O, si può costruire la tangente dell'ipocicloide parallela a questa direzione. *Le coppie di tangenti perpendicolari, i cui vertici* SS_1 *siano gli estremi di un diametro del circolo* m, *vengono generate da coppie di punti* P *in involuzione sulla retta* AA'. *Due di tali coppie tagliano il cerchio* m *secondo due diametri perpendicolari. Se col punto* μ *di una tangente qualunque come centro si descrive un cerchio* k, *esso taglia il cerchio* m *in due punti* AA' *e la tangente in* OO_1 *(ove* OA OA', O_1A O_1A' *sono due coppie di tangenti perpendicolari); e se dal punto* μ *si tira una retta qualunque, essa taglia il cerchio* k, *la retta* AA' *e il cerchio* m *in quattro punti di un gruppo armonico.*

Ritornando alla considerazione della conica polare di un punto P rispetto ad una conica k, osserviamo *che ogni retta passante pel punto* P *o pel punto* P_1 *taglia le due coniche* k *e* k_1 *in quattro punti di un gruppo armonico, oppure, che ciascuna retta passante per* P *taglia tutte le sue coniche polari in coppie di punti in involuzione, i cui punti doppii sono i punti d' incontro con la conica fondamentale* k. *Le polari dei quattro punti d'incontro della retta* PP_1 *con le due coniche* $k\,k_1$ *rispetto a* k_1 *e* k, *s'incontrano nel punto d'incontro della retta* OO_1 *con la polare di* P *e di* P_1 *rispetto a* k *o* k_1, *esse sono rispettivamente tangenti alle due coniche* $k\,k_1$ *in quei quattro punti e formano un gruppo armonico.*

Per ciascun punto del piano passano infinite coniche polari di un punto P. *Per due punti arbitrari del piano passa soltanto una conica polare di un punto* P. Da qui si ricava: *Tutti i cerchi che tagliano ortogonalmente un cerchio dato sono coniche polari del centro.*

Se la retta OO_1 cade con la polare del punto P, si ha:

Per ogni punto situato esternamente alla conica k *c'è una conica polare reale* k_1 *che la tocca nei punti* OO_1, *ed è reciproca di sè stessa rispetto alla medesima, La* k *è reciproca di sè stessa rispetto alla* k_1.

Per il punto P si tirino due trasversali, che tagliano *k* in AA' BB' e questi si congiungano con OO_1 in modo da ottenere quattro punti A_1A_1', B_1B_1' ove le $A_1A'_1, B_1B'_1$ passano pure per P, allora si ha:

TEOREMA IV. *I vertici di due quadrangoli* $AA'BB'$, $A_1A_1'B_1B_1'$ *corrispondenti in due coniche reciproche di sè stesse ciascuna rispetto all'altra sono situati in una conica.*

5°

COSTRUZIONE DI UNA CONICA MEDIANTE 5 PUNTI. Si considerino due fasci proiettivi $U \equiv (abc\ldots)$ $U' \equiv (a'b'c'\ldots)$ chiamando con ABC i punti d'incontro delle coppie aa', bb', cc'. Si scelgano aa' come trasversali dei due fasci, i raggi b e c danno su a i punti β e γ; i raggi $b'c'$ su a' i punti $\beta'\gamma'$. Le rette $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ s'incontrano nel centro U'' prospettivo coi due fasci dati. *La tangente in* A *è la retta* $(A, \beta\gamma', \beta'\gamma)$, *e la tangente in* B *è la retta che lo congiunge col punto d'incontro della retta* $\beta\beta'$ *con la tangente in* A. Onde si vede che costruito un punto qualunque della conica si ha in questo tosto la tangente. *Osserviamo che le rette* BC, $\beta'\gamma$, $\beta\gamma'$ *e la tangente in* A *s'incontrano in un punto* O. Dunque per costruire un punto qualunque D della conica situato in un raggio d del fascio U, si determini il punto d'incontro δ' del raggio d col raggio a', si congiunga δ' con β sino ad incontrare in O_1 la tangente in A, il puuto O_1 si congiunga con β', otterremo in a il punto δ, che congiunto con U' dà il raggio d'. Questa costruzione dunque si applica specialmente nel caso in cui il punto U' cada fuori del foglio di disegno.

6°

Sui fuoohi.

TEOREMA I. *Se da due punti* FF_1 *dell'asse radicale di un fascio di cerchi, si tirano le quattro tangenti ad un cerchio qualunque del fascio, il luogo dei quattro punti d'incontro delle tangenti è una curva del 4° ordine, che si scinde in due coniche, che passano per i punti doppii dell'involuzione determinata dal fascio sopra l'asse centrale, e che hanno* FF_1 *come fuochi.*

TEOREMA II. *Se i punti doppii dell'involuzione data dal fascio sull'asse centrale sono immaginari allora le due coniche sono ellissi oppure iperboli secondo che* FF_1 *sono situati dalla stessa parte o no rispetto all'asse centrale. Se i punti doppii sono reali allora le curve sono sempre l'una ellisse, l'altra iperbole.*

TEOREMA III. *La tangente in un punto della curva è la retta che lo congiunge al centro del cerchio del fascio, da cui quel punto si è generato nel modo indicato dal teorema I.*

Da qui si ricavano con molta eleganza e semplicità i seguenti teoremi:

Se da un centro di similitudine di due cerchi di centro FF_1 *si tirano delle secanti, e si uniscono* FF_1 *con i punti d'incontro di esse con i cerchi, i punti d'incontro dei raggi non paralleli giacciono in una conica, ch'è un'ellisse od un'iperbole, secondo che le tangenti condotte dal centro di similitudine ai due cerchi sono immaginarie o reali. Questa conica passa per i punti d'incontro dei due cerchi. Oppure si può dire che la curva che divide per metà lo spazio racchiuso da due circonferenze è una curva del 4° ordine, che si scompone in due coniche che hanno per fuochi i centri delle due circonferenze.*

Teorema IV. *Le due coppie di tangenti parallele condotte alla conica dai punti* DD_1 *d'incontro delle due direttrici con l'asse maggiore nel caso dell'ellisse, o con l'asse trasverso nel caso dell'iperbole, tagliano una retta perpendicolare all'asse in due punti, la cui distanza è eguale all'asse maggiore o asse trasverso.*

Teorema V. *Il punto d'incontro di una tangente* a *di una conica in un punto* A *con la tangente in un vertice dell'asse maggiore nel caso dell'ellisse, dell'asse trasverso nel caso dell'iperbole, divide per metà il segmento compreso fra il vertice e il punto d'intersezione della congiungente l'altro vertice col punto di contatto* O *della tangente* a *con la tangente nel primo vertice.*

Teorema VI. *Il punto d'incontro* A *di una tangente qualunque in un punto* O *della conica con la tangente in un vertice dell'asse maggiore nel caso dell'ellisse, oppure dell'asse trasverso nel caso dell'iperbole, uno dei fuochi* F_1, *il punto* O, *giacciono in un cerchio, che passa pel punto d'incontro della normale col raggio* FA *e che ha il suo centro in quest'ultima retta.*

Col teorema I oltre di dimostrare i teoremi enunciati si possono dedurre elegantemente e semplicemente le proprietà focali delle coniche; lascio al mio lettore di farne l'applicazione.

Tenendo conto di quello che si è detto al n° 4, considerando la polo-conica della retta all'infinito rispetto ad un cerchio si ha:

Teorema VII. *Se si tagliano due tangenti* $\alpha\alpha_1$ *di un cerchio con due tangenti parallele* tt_1, *che le incontrano rispettivamente in* BC, AD, *le rette* AC, BD *sono tangenti di un'iperbole, che ha* $\alpha\alpha_1$ *per asintoti, il centro del cerchio come fuoco* F, *e la retta polare del punto* $\alpha\alpha_1$ *rispetto al cerchio quale direttrice* f.

Costruzioni. Dai teoremi I, II, III, si ricava la costruzione della conica mediante punti e tangenti, dati che siano i fuochi FF_1 e due punti simmetrici rispetto all'asse focale (reali od immaginari). Basta far passare per questi due punti un fascio di cerchi ed applicare la costruzione indicata dal teorema I. Nel caso che i due punti si riducano ad un punto, ossia ad un vertice allora tutti i cerchi del fascio toccano l'asse focale FF_1 nel vertice dato.

Col teorema VI si possono pur costruire punti e tangenti di una conica, dati che siano i due fuochi FF_1 ed un vertice. Basta per un punto qualunque A della tangente nel vertice e rispettivamente per F ed F_1 far passare due cerchi, che abbiano i loro centri rispettivamente in F_1A ed FA. Questi due cerchi si incontrano oltre che in A, in un punto O della conica la cui tangente è OA, e la cui normale è la retta che lo congiunge coi punti d'incontro dei due cerchi rispettivamente con F_1A ed $F'A$.

Dal teorema VII si deduce la costruzione dell'iperbole mediante tangenti e punti, dati che siano i due asintoti $\alpha\alpha_1$ e il fuoco.

Per la parabola valgono non solamente i teoremi enunciati per l'ellisse e per l'iperbole, ma per la sua natura speciale se ne possono dimostrare anche molti altri.

7°

Dimostrare le seguenti relazioni che hanno luogo fra i due punti uniti FF_1 *e due coppie* AA', BB' *di due punteggiate proiettive sovrapposte*

$$\frac{FA' \cdot F_1A}{AA'} = F_1J = \text{cost.}, \tag{1}$$

ove J è uno dei punti limiti, l'altro sia I'.

Dalla (1) dati FF_1J e A si può costruire A', oppure dati FF_1AA' si costruisce J.

$$\frac{AF \cdot AF_1}{A'F \cdot A'F_1} = \frac{AJ}{I'A'} \tag{2}$$

mi dà il rapporto delle due distanze AJ, $I'A'$, il cui prodotto è costante.

Per l'involuzione si ha:

$$\frac{AF \cdot AF_1}{A'F \cdot A'F_1} = \frac{AO}{OA'} \tag{2$_a$}$$

$$\frac{1}{F_1B} - \frac{1}{F_1A} = \frac{FB}{FB' \cdot F_1B} - \frac{FA}{F_1A \cdot FA'} \tag{3}.$$

Da qui dati $FF_1AA'B$ si può costruire B'.

Dalla (1) si ricava l'elegante formola seguente:

$$\frac{1}{AF_1} - \frac{\Delta}{A'F_1} = \frac{1}{JF_1}, \qquad \text{ove} \qquad \Delta = \frac{FJ}{F_1J} = \frac{FA \cdot F_1A'}{F_1A \cdot FA'} = \text{cost.}, \tag{4}$$

Per l'involuzione $\Delta = \frac{FO}{F_1O} = -1$, e si ottiene la notissima formola

$$\frac{1}{AF_1} + \frac{1}{A'F_1} = \frac{2}{F_1F}, \qquad (4_a)$$

Dalla (4) dati FF_1J ed A si può costruire A'.

Se i punti uniti FF_1 coincidono allora le formole trovate diventano:

$$\frac{AF^2}{A'A} = FJ = \text{cost.}, \qquad (1')$$

$$\frac{AF^2}{A'F^2} = \frac{AJ}{I'A'}, \qquad (2')$$

$$\frac{1}{FA} - \frac{1}{FA'} = \frac{1}{FB} - \frac{1}{FB'} \qquad (3').$$

Quest'ultima trovasi anche nella *Geometria superiore* di Chasles ottenuta però con metodo affatto diverso. Finalmente:

$$\frac{1}{AF} - \frac{1}{A'F} = \frac{1}{JF} \qquad (4').$$